ЕВРОПЕЙСКИ СЪЮЗ
ЕВРОПЕЙСКИ ФОНД ЗА
РЕГИОНАЛНО РАЗВИТИЕ

ОПЕРАТИВНА ПРОГРАМА
НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ ЗА
ИНТЕЛИГЕНТЕН РАСТЕЖ

ПРОЕКТ

BG05M2OP001-1.001-0003
„ЦЕНТЪР ЗА ВЪРХОВИ ПОСТИЖЕНИЯ ПО ИНФОРМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННИ И КОМУНИКАЦИОННИ ТЕХНОЛОГИИ“
2018 – 2023

ИКТ

ЦЕНТЪР ЗА ВЪРХОВИ ПОСТИЖЕНИЯ ПО
ИНФОРМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННИ И
КОМУНИКАЦИОННИ ТЕХНОЛОГИИ

Приложения на неравенства на Харди за сингулярни параболични уравнения

Цвятко Рангелов и Николай Кутев

Секция Диференциални уравнения и математическа физика
Институт по математика и информатика, Българска академия на науките

Съдържание

1. Въведение
2. Съществуване на глобално решение
3. Избухване за крайно време
4. Нулева контролируемост на решението

Проект BG05M2OP001-1.001-0003 „Център за върхови постижения по Информатика и информационни и комуникационни технологии“, финансиран от Оперативна програма „Наука и образование за интелигентен растеж“, съфинансирана от Европейския съюз чрез Европейските структурни и инвестиционни фондове.

Въведение

Изучават се гранични задачи за линейни и нелинейни параболични задачи със сингулярни потенциали. Получени са резултати за съществуване и несъществуване като приложение на различни неравенства на Харди. Изследвани са също въпроси за избухване на решенията за крайно време, както и условия за неконтролируемост на решенията.

Разглеждаме гранична задача за p-параболично уравнение

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = \mu W(x)|u|^{p-2}u + f(t,x), \quad \text{за } t \in (0,T), x \in \Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \text{за } x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0 \quad \text{за } t \in (0,T), x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

където $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ е p-Лапласиана, $\mu = const \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $n \geq 2$, $p \neq n$, Ω е ограничена област в $\mathbb{R}^n$, $0 \in \Omega$ и функцията $W(x)$ е сингулярна върху $\partial\Omega$ и/или в 0, $u_0(x) \in L^2(\Omega)$, $f(t,x) \in L^2((0,T) \times \Omega)$.

Предполагаме, че функцията $W(x)$ е от вида

$$W(x) = |x|^{m-n} \left|\varphi^m(x) - |x|^m\right|^{-p}, m = \frac{p-n}{p-1}. \tag{2}$$

в $\Omega = \{|x| < \varphi(\theta)\}$, $\theta = \frac{x}{|x|}$ е ъгловата променлива на x и Ω е звездна област по отношение на вътрешно кълбо с център 0.
Например, при $m > 0$ и $\Omega = B_1$ за функцията $W(x)$ е изпълнено

$$W(x) \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p d^{-p}(x).$$

$$W(x) \geq \left(\frac{p-n}{p}\right)^p |x|^{-p}(x).$$

ИКТ

Интересът към параболични задачи със сингулярни потенциали е свързан с приложенията, например в

- задачи на молекулярната физика (Lévi-Leblond, Electron capture by polar molecules, Phys. Rev., v. 153, 1967);
- квантовата космология (Berestiki, Esteban, Existrence and bifurcation of solutions for an elliptic degenerate problem, J. Diff. Eq. v. 134, 1997);
- квантовата механика (Baras, Goldshtein, The heat equation with singular potential, Trans. Am. Math. Soc. v. 284, 1984);
- флуид в пореста среда (Ansini, Giakomelli, Doubly nonlinear thin-film equation in one dimension, Arch. Ration. Mach. Anal, v. 173, 2004) и др.

Интересуваме се от следните въпроси за задачата (1) в зависимост от параметрите p, n, μ, началните данни $u_0(x)$ и дясната страна $f(t, x)$:

A) Съществуване на глобално решение или избухване за крайно време.

Б) Нулева контролируемост на решението.

Тези въпроси са предмет на редица публикации за потенциали $W(x)$, които са с единична сингулярност, например в Baras, Goldshtein (1984) и в Ervedoza (2006) за $W(x) = |x|^{-2}$ и $p = 2$ за A) и Б); в Azorero, Alonso (1998) за $W(x) = |x|^{-p}$, $1 < p < n$ за A); в Biccari, Zuazua(2016) за $W(x) = d^{-2}(x)$ за A) и B) и др.

Целта на изследването ни е да разширим горните резултатите за потенциали, сингулярни както в 0 така и върху цялата граница. Съществено при получаване на новите резултати е използване на неравенство на Харди за потенциала (2) с константа, която е оптимална. Представените резултати са предмет на следните публикации в последната година, Kutev, Rangelov: AIP (2021), Comp. Rend. Acad. Sci. Bulg. (2021), arXiv:2108.01650v2 (2021).

Съществуване на глобално решение

Неравенство на Харди

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx \geq C_{p,n} \int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^{n-m}|\varphi^m(x) - |x|^m|^p} dx, \qquad (3)$$

за $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, където $m = \dfrac{p-n}{p-1}$, $p > n$, $n \geq 2$.

$\Omega = \{|x| < \varphi(\theta)\} \subset \mathbb{R}^n, \theta = \dfrac{x}{|x|}$ е ъгловата променлива на x и Ω е звездна по отношение на малко кълбо с център в 0. Константата $C_{p,n} = \left(\dfrac{p-n}{p}\right)^p$ е оптимална (Fabricant, Kutev, Rangelov, Mediter. J. Math. v.14, 2017).

Теорема 1

Предполагаме, че $\Omega = \{|x| < \varphi(\theta)\} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, е звездна област по отношение на малко кълбо с център в 0. Тогава ако $\mu < \left(\frac{p-n}{p}\right)^p$, $p > n$, $f(t,x) = 0$, $u_0(x) \in L^2(\Omega)$, то задачата (1) с функция $W(x)$ дадена в (2) има глобално решение, удовлетворяващо

$$u(t,x) \in L^\infty\left((0,\tau), L^2(\Omega)\right) \cup L^p\left((0,\tau), W^{1,p}(\Omega)\right), \quad \text{за всички } \tau > 0. \tag{4}$$

ИКТ

За доказателство на теоремата разглеждаме срязаната функция (2)

$$W_N(x) = \min\{N, W(x)\}, N = 1, 2, \dots \tag{5}$$

и нека $u_N(x,t)$ е решение на срязаната задача

$$\begin{cases} u_{N,t} - \Delta_p u_N = \mu W_N(x)|u_N|^{p-2}u_N, & \text{за } x \in \Omega, t > 0, \\ u_N(0,x) = u_0(x) & \text{за } x \in \Omega, \\ u_N(t,x) = 0 & \text{за } x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases} \tag{6}$$

Умножавайки (6) с u_N и интегрирайки по части, като използваме неравенството на Харди (3) получаваме следните оценки за всяко $T > 0$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |u_N(T,x)|^2 dx + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_N(t,x)|^p dxdt \\ &= \int_\Omega |u_0(x)|^2 dx + \mu \int_0^T \int_\Omega W_N(x)|u_N(t,x)|^p dxdt \le \int_\Omega |u_0(x))|^2 dx \\ &+\mu C_{p,n}^{-1} \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_N(t,x)|^p dxdt.\end{aligned} \tag{7}$$

Тъй като $\mu C_{p,n}^{-1} < 1$ то от (7) следва енергитичната оценка

$$\int_\Omega |u_N(T,x)|^2 dx + (1 - \mu C_{p,n}^{-1}) \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_N(t,x)|^p dxdt \le \int_\Omega |u_0(x)|^2 dx.$$

ИКТ

От принципа на сравнение $u_N(x,t)$ е ненамаляваща редица от функции, защото $W_N(x,t) \geq W_M(x,t)$ за всички $x \in \Omega$, $t > 0$ и $N \geq M$. Разглеждаме границата $N \to \infty$ като използваме Теорема 4.1 от Boccardo, Murat (1992). Така глобалното решение $u(x,t)$ на (1) се получава като граница на решенията $u_N(x,t)$ на срязаната задача (6) и $u(x,t)$ удовлетворява свойствата за гладкост в (4).

Проект BG05M2OP001-1.001-0003 „Център за върхови постижения по Информатика и информационни и комуникационни технологии“, финансиран от Оперативна програма „Наука и образование за интелигентен растеж“, съфинансирана от Европейския съюз чрез Европейските структурни и инвестиционни фондове.

Избухване за крайно време

Разглеждаме задачата (1) с $u_0(x) > 0$ за $x \in \bar{\Omega}$.

Теорема 2

Предполагаме, че $p > 2$, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $u_0(x) > 0$ в $\bar{\Omega}$ и $\mu > C_{p,n}$, тогава решението на (1) избухва за крайно време.

Доказателството на теоремата се основава на 2 леми и теорема - принцип на сравнение.

Нека λ_{1N}, $\phi_{1N}(x)$ са първото собствено число и първата собствена функция на задачата

$$\begin{cases} -\Delta_p \phi_{1N} = \lambda_{1N} W_N(x) |\phi_{1N}|^{p-2} \phi_{1N}, & x \in \Omega, \\ \phi_{1N} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{8}$$

Където $W_N(x)$ е срязаната функция определена в (2), ще използваме следния резултат

Лема 1

Предполагаме, че Ω е ограничена C^2 област и $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\lambda > C_{p,n}$, тогава е изпълнено

$$\lambda_{1N} \geq C_{n,p}, \quad N = 1, 2, \ldots, \lim_{N \to \infty} \lambda_{1N} = C_{n,p} \tag{9}$$

Ще построим положително суб-решение $v(x,t) = X(x)T(t)$ на (6) с метода на разделяне на променливите, където $X(x)$ и $T(t)$ са решения на задачите

$$\begin{cases} -\Delta_p X(x) - \mu W_N(x) X^{p-1}(x) = -X(x), & x \in \Omega, \\ X(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} T'(t) = T^{p-1}(t), & t > 0, \\ T(0) = T_0. \end{cases} \tag{11}$$

Тъй като $T(t) = T_0\left[1 - (p-2)T_0^{p-2}t\right]^{-\frac{1}{p-2}}$ for $p > 2$, то $T(t)$ избухва в $t = \left[(p-2)T_0^{p-2}\right]^{-1}$.

За $a^{p-2} = \mu$, след смяна на функцията $aX = Y$, задачата (10) се трансформира в

$$\begin{cases} -\Delta_p Y(x) = \mu\left(W_N(x)Y^{p-1}(x) - Y(x)\right), & x \in \Omega, \\ Y(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{12}$$

Лема 2, Azorero, Alonso (1998)

(1) Съществува константа $A > 0$ така, че ако (12) има положително решение $Y(x)$ то $\|Y\|_{L^\infty(\Omega)} > A$;
(2) Ако λ_{1N} е първото собствено значение на $-\Delta_p$ с тегло $W_N(x)$ то λ_{1N} е единствена бифуркационно точка от безквайност за задачата (12).

Теорема 3, Принцип за сравнение

Нека $u(x,t)$, определено в (4) е решение на (6) и $v(x,t)$ е положително суб-решение на (6), т.е.,

$$\begin{cases} v_t - \Delta_p v \le \mu W_N(x) v^{p-1}, & \text{за } x \in \Omega, t \in [0,\tau), \\ v(x,0) \le f(x), \quad f(x) > 0 & \text{за } x \in \bar{\Omega}, \\ v(x,t) \le 0 & \text{за } x \in \partial\Omega, t \in [0,\tau), \end{cases} \tag{13}$$

при фиксирано τ. Тогава

$$v(x,t) \le u(x,t), \quad \text{за } x \in \Omega, t \in [0,\tau). \tag{14}$$

Проект BG05M2OP001-1.001-0003 „Център за върхови постижения по Информатика и информационни и комуникационни технологии", финансиран от Оперативна програма „Наука и образование за интелигентен растеж", съфинансирана от Европейския съюз чрез Европейските структурни и инвестиционни фондове.

Нулева контролируемост на решението

За задачата (1) при $p = 2$, $n > 2$ ще докажем съществуване на решение при $\mu < \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ и гранична неконтролируемост при $\mu > \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$. Ще използваме следното неравенство на Харди, получено в Fabricant, Kutev, Rangelov, CEJM (2013)

Теорема 4

Предполагаме, че $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $0 \in \Omega$ и Ω е звездна по отношение на малко кълбо с център в 0, тогава за всяко $u(x) \in H_0^1(\Omega)$ е в сила неравенството

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^2 |1 - |x|^{n-2}\varphi^{2-n}(x)|^2} dx. \qquad (15)$$

Константата $\left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ е оптимална.

В следната теорема като се използва Теорема ?? се доказва, че за $\mu < \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ задачата (1) с дясна страна $f(t,x) \in L^2((0,T) \times \Omega)$ има глобално решение за всяко $t > 0$.

Теорема 5

Нека $\Omega = \{|x| < \varphi(x)\} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, е звездна по отношение на малко кълбо с център в 0. Тогава ако $\mu < \left(\frac{n-2}{n}\right)^2$, задачата (1) има глобално решение $u(t,x)$, такова че

$$u(t,x) \in L^\infty\left([0,\tau), L^2(\Omega)\right) \cup L^2\left((0,\tau), W^{1,2}(\Omega)\right), \quad \text{за всяко } \tau > 0. \tag{16}$$

Целта ни е да докажем, че задачата (1) не може да бъде стабилизирана поради избухващи моди концентрирани около особеностите когато $\mu > \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$. Като използваме идеята от Ervedoza (2008) ще разгледаме за всяко $u_0 \in L^2(\Omega)$ функционала $J_{u_0}(u,f) = \frac{1}{2}\int_{\Omega\times(0,T)} u^2(t,x)dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}dt$ определен в множеството
$D(u_0) = \left\{(u,f) \in L^2\left((0,T);H_0^1(\Omega)\right) \times L^2\left((0,T);H^{-1}(\Omega)\right)\right\}$ където $u(t,x)$ удовлетворява (1). Тук $f(t,x)$ е контрола, който е нула в $\Omega\backslash\bar{\omega}$, $\omega \Subset \Omega\backslash\{0\}$.
Казваме, че задачата (1) може да бъде стабилизирана ако съществува константа C_0, така че

$$\inf_{(u,f)\in D(u_0)} J_{u_0}(u,f) \leq C_0\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}, \text{ for every } u_0 \in L^2(\Omega).$$

Разглеждаме регуляризираната задача

$$\begin{cases} u_t - \Delta u - \mu \Psi_\varepsilon u = f(t,x), \quad \text{за } (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ u(t,x) = 0 \quad \text{заг } (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \text{за } x \in \Omega, \end{cases} \tag{17}$$

където $\Psi_\varepsilon(x) = \left(|x|^2 + \varepsilon\right)^{-2} \left(1 + \varepsilon - |x|^{n-2} \varphi^{2-n}(x)\right)^{-2}$.

Теорема 6

Предполагаме, че $\mu > \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$, $\omega \in \Omega\backslash\{0\}$, $n \geq 3$ и f е локализирана в ω. Тогава не съществува константа C_0 такава, че за всяко $\varepsilon > 0$ и $u_0 \in L^2(\Omega)$ е изпълнено

$$\inf_{f \in D_1(f)} J^{\varepsilon}_{u_0}(f) \leq C\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}$$

където $D_1(f) = \left\{f \in L^2\left((0,T); H^{-1}(\Omega)\right)\right\}$.

Благодоря за вниманието!

Проект BG05M2OP001-1.001-0003 „Център за върхови постижения по Информатика и информационни и комуникационни технологии“, финансиран от Оперативна програма „Наука и образование за интелигентен растеж“, съфинансирана от Европейския съюз чрез Европейските структурни и инвестиционни фондове.