



ИНСТИТУТ ПО ИНФОРМАЦИОННИ И
КОМУНИКАЦИОННИ ТЕХНОЛОГИИ
БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ



Приложение на йерархична полусепарабелна компресия за решаване на дробно дифузионни задачи

Димитър Славчев

Онлайн конференция 2022 „Нови скалируеми алгоритми и приложения“

01.12.2022 г.

Съдържание

- 1 Увод
- 2 Аномална (Дробна) дифузия
- 3 Методи за решаване
 - Йерархична полусепарабелна компресия
 - LU факторизация
- 4 Числени резултати
- 5 Заключение

Увод

- Аномалната (дробна) дифузия описва процеси, при които брауновата хипотеза е нарушена. Моделира се математически с дробният оператор на Лаплас. Има широко приложение при моделирането обработката на изображения, финансовата математика, електро-магнитостатиката, перидинамиката, моделирането на течения в порести среди и много други.
- Граничните задачи за дробна дифузия са нелокални и, в общия случай, численото им е изчислително скъп процес.
- В тази презентация е направен анализ на бързодействието на директен солвър от пакета MKL и на йерархичен солвър базиран на йерархична полусепарабелна компресия за елиптични и параболични дробно-дифузионни задачи, моделирани с интегралната дефиниция на дробният Лапласиан от софтуерния пакет STRUMPACK.

Дробна дифузия

Дробен Лапласиан

Интегралната дефиниция на дробният Лапласиан се описва със следната формула:

$$(-\Delta)^\alpha u(x) = C(d, \alpha) \text{ P.V. } \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{d+2\alpha}} dy, \quad C(d, \alpha) = \frac{2^{2\alpha} \alpha \Gamma(\alpha + \frac{d}{2})}{\pi^{d/2} \Gamma(1 - \alpha)}.$$

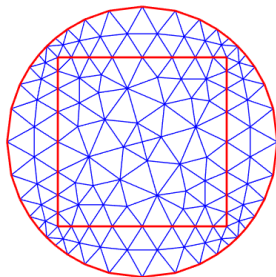
След дискретизация с метод на крайните елементи матрицата на коравина има вида:

$$K_{ij} = \frac{C(d, \alpha)}{2} \sum_{\ell=1}^{N_{\tilde{T}}} \left(\sum_{m=1}^{N_{\tilde{T}}} I_{\ell,m}^{i,j} + 2J_{\ell}^{i,j} \right), \quad \ell, m \in [1, \dots, N_{\tilde{T}}],$$

където за въведените интеграли I и J са в сила формулите

$$I_{\ell,m}^{i,j} = \int_{T_\ell} \int_{T_m} \frac{(\varphi_i(x) - \varphi_i(y))(\varphi_j(x) - \varphi_j(y))}{|x - y|^{d+2\alpha}} dx dy$$

$$J_{\ell}^{i,j} = \int_{T_\ell} \int_{B^c} \frac{\varphi_i(x)\varphi_j(x)}{|x - y|^{d+2\alpha}} dy dx.$$



Дробна дифузия

Тестови задачи

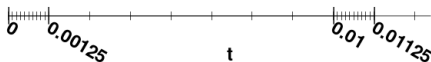
- 1 Елиптическа задача. Свежда се до решаване на една система линейни алгебрични уравнения $KU = f$
- 2 Параболична задача с постоянна стъпка по времето $\tau_j = \tau$. Свежда се до една факторизация и решаване на m системи с една и съща матрица $\tilde{K}u^j = \tilde{f}^j$.

$$\left(\frac{M_L}{\tau_j} + K\right) u^{j+1} = M_L \left(\frac{f^{j+1} + f^j}{2} + \frac{u^j}{\tau_j}\right), \quad j \in [1, m], \quad f^j = 0, \quad u^0 = u_0 \quad (1)$$

- 3 Параболична задача с променлива стъпка по времето.

$$f(x, t) = \begin{cases} 100\bar{f}(x), & t \in (0, \tilde{\tau}_1), \\ 200\bar{f}(x), & t \in (\tilde{\tau}_2, \tilde{\tau}_3), \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \bar{f}(x) = \begin{cases} 1 & x_1 x_2 > 0, x \in \Omega \\ -1 & x_1 x_2 \leq 0, x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega. \end{cases}$$

където $\tilde{\tau}_1 = 0.01$, $\tilde{\tau}_2 = 0.05$ и $\tilde{\tau}_3 = 0.06$. Интервалът $[0, T]$ се разделя на 80 стъпки. Стъпката след всяка точка с промяна на дясната част се разделя на 10. Свежда се до 8 факторизации и 116 решаване с факторизирана матрица.



Йерархична полусепарабелна компресия от пакет STRUMPACK

1 Йерархична полусепарабелна компресия

Йерархичната компресия е приблизителна, т.е. $H \approx A$.

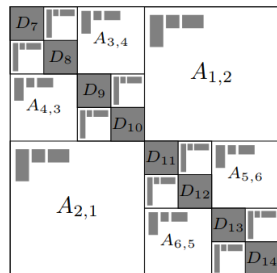
- 1 Рекурсивно разделя матрицата и декомпозира извъндиагоналните блокове на U , B и V генератори.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & U_1^{\text{big}} B_{1,2} V_2^{\text{big}*} \\ U_2^{\text{big}} B_{2,1} V_1^{\text{big}*} & D_2 \end{bmatrix}$$

- 2 Диагоналните блокове също се декомпозират.
- 3 Съществува рекурсивна зависимост между U и V генераторите на различни нива.

$$U_3^{\text{big}} = \begin{bmatrix} U_1^{\text{big}} & 0 \\ 0 & U_2^{\text{big}} \end{bmatrix} U_3, \quad V_3^{\text{big}} = \begin{bmatrix} V_1^{\text{big}} & 0 \\ 0 & V_2^{\text{big}} \end{bmatrix} V_3$$

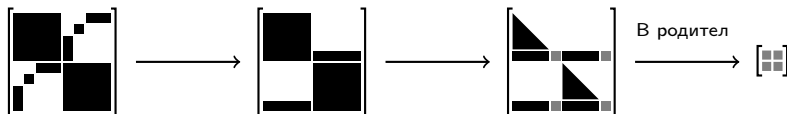
$$A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & U_1^{\text{big}} B_{1,2} V_2^{\text{big}*} \\ U_2^{\text{big}} B_{2,1} V_1^{\text{big}*} & D_2 \end{bmatrix} & U_3^{\text{big}} B_{3,6} V_6^{\text{big}*} \\ U_6^{\text{big}} B_{6,3} V_3^{\text{big}*} & \begin{bmatrix} D_4 & U_4^{\text{big}} B_{4,5} V_5^{\text{big}*} \\ U_5^{\text{big}} B_{5,4} V_4^{\text{big}*} & D_5 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$



ULV-подобна факторизация и решение

Изчислителната сложност на компресията в общия случай е $O(rn^2)$, при определени предположения сложността е $O(r^2n)$. r – Изчисленият максимален извъндиагонал ранг. За задачи с подходяща структура $r \ll n$. Потребителят задава прагове ε_{abs} и ε_{rel} .

- ULV-подобна факторизация. Изчислителната сложност на тази стъпка е $O(r^2n)$.



- Решение с факторизираната матрица.
Изчислителната сложност на тази последна стъпка е $O(rn)$.

Решение с LU факторизация. Метод на Гаус.

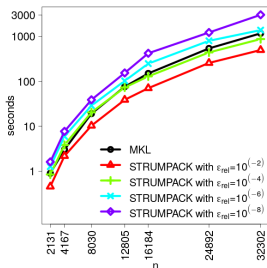
- При използване на LU факторизация изчислителната сложност е $O(n^3)$ за факторизацията и $O(n^2)$ за решението. Използваме Intel's MKL.

Спецификация на използваната високопроизводителна изчислителна система

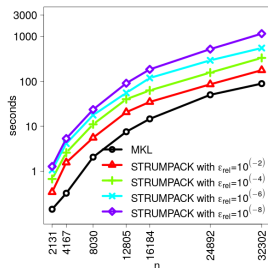
- AVITONOL е изигран от 150 HP Cluster Platform SL250S GEN8 сървъри с по 2 Intel Xeon E 2650 v2 CPUs (общо 16 ядра) и 2 Intel Xeon Phi 7120P копроцесора (Many Integrated Core (MIC) архитектура) (всеки с 61 ядра).



Елиптична задача



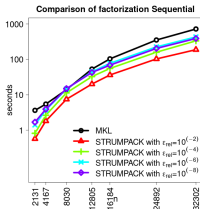
(a) Последователно изпълнение



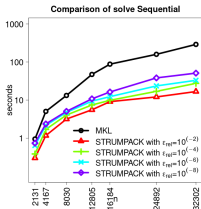
(б) Паралелно изпълнение с 16 нишки

Фигура: Време за решаване на елиптичната задача.

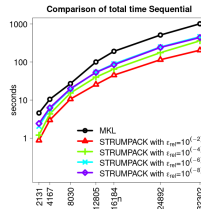
Параболична задача с постоянна стъпка по времето



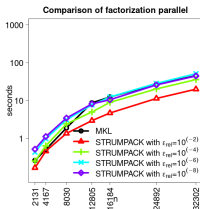
(а) Последователна компресия и факторизация



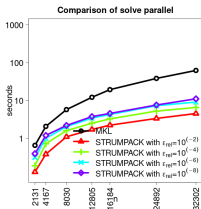
(б) Последователни решения



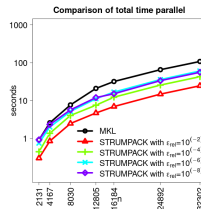
(в) Последователно общо време



(г) Паралелна компресия и факторизация



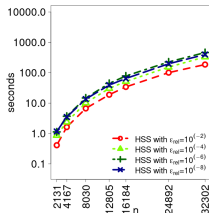
(д) Паралелни решения



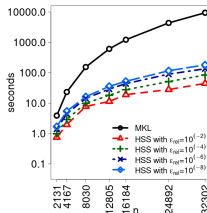
(е) Паралелно общо време



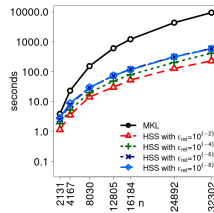
Параболична задача с променлива стъпка по времето



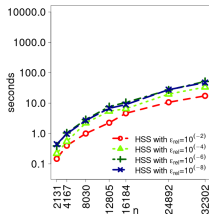
(а) Последователна компресия



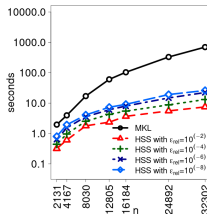
(б) Последователни факторизации и решения



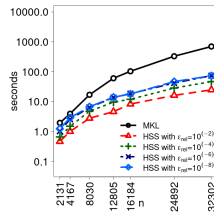
(в) Последователно общо време



(г) Паралелна компресия

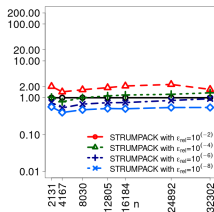


(д) Паралелни факторизации и решения

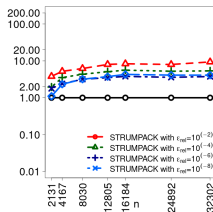


(е) Паралелно общо време

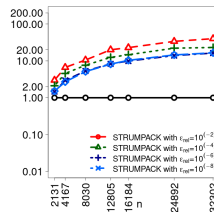
Сравнение на бързодействието на HSS с MKL: $\frac{t_{MKL}}{t_{HSS}}$



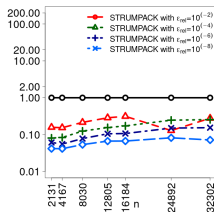
(а) Последователно
Елиптическа задача



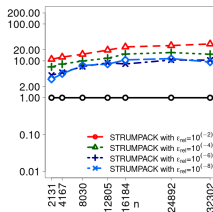
(б) Последователно
параболична задача с
постоянна стъпка



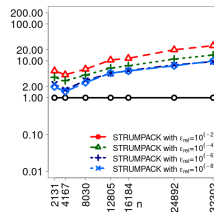
(в) Последователно
параболична задача с
променлива стъпка



(г) Паралелно Елиптическа
задача



(д) Последователно
параболична задача с
постоянна стъпка
HSS за дробна дифузия



(е) Последователно
параболична задача с
променлива стъпка



Заклучение

- Представени са числени експерименти за решаване на елиптични и параболични дробно-дифузионни задачи. Сравнено е бързодействието на паралелен солвър базиран на йерархична полусепарабелна компресия от пакет STRUMPACK с LU базиран солвър от MKL.
- За елиптичната задача йерархичният солвър показва по-добри времена за някои последователни експерименти и по-бавни за паралелните експерименти.
- За параболичните задачи йерархичният солвър показва значително по-добри времена за всички експерименти. Това показва добрата ефективност на метода.

Благодаря за вниманието!